

SIMBOLIČKA ANALIZA ELEKTRONSKIH KOLA ZASNOVANA NA GRANIČNIM VREDNOSTIMA PARAMETARA KOLA

Srdan Đorđević, *Elektronski fakultet Niš*, srdjan.djordjevic@elfak.ni.ac.rs

Sadržaj – Ovaj rad opisuje metod za generisanje analitičkog izraza funkcije kola u faktorizovanom obliku. Postupak se zasniva na dodeli graničnih vrednosti parametrima mreže koja rezultuje u zameni regularnih elemenata kola idealnim. Za determinante brojioca i imenioca funkcije kola kao i subdeterminante dobijene njihovim razvojem koristi se topološka interpretacija u formi opisa kola. Cilj postupka je generisanje analitičkog izraza funkcije kola sa što manjim brojem računskih operacija.

1. UVOD

U ovom radu opisan je metod za direktno generisanje simboličke funkcije kola u faktorizovanom obliku. Postupak se zasniva na dodeli graničnih vrednosti parametrima mreže, koja rezultuje zamenom regularnih elemenata kola singularnim elementima [1, 2]. Nastale promene opisa kola smanjuju složenost električne mreže.

Predloženi metod uvodi grafičku predstavu analitičkog izraza funkcije kola pod nazivom topološki dijagram odlučivanja (Topology Decision Diagram, TDD) [1]. Ova struktura podataka se konstruiše inspekcijom topologije električne mreže. Sadržaj rada posvećen je pre svega određivanju relacija između matričnog postupka za rešavanje simboličkog sistema linearnih jednačina i predloženog metoda.

U narednom poglavlju dat je sažeti opis predloženog koncepta simboličke analize. Treće poglavlje posvećeno je postupcima koji se primenjuju tokom generisanja analitičkog izraza a predstavljaju zamenu određenih potkola ekvivalentnim elementima radi pojednostavljenja kola. Kako se radi o postupku analize kola koji se zasniva na inspekciji topologije mreže, u četvrtom poglavlju data je topološka interpretacija determinanata i subdeterminanata brojioca i imenioca funkcije kola. Efikasnost predloženog postupka ilustrovana je primerom koji je opisan u petom poglavlju

2. GENERISANJE ANALITIČKOG IZRAZA FUNKCIJE KOLA KORIŠĆENJEM GRANIČNIH VREDNOSTI PARAMETARA

Postupci za simboličku analizu elektronskih kola klasifikuju se u dve osnovne kategorije: (i) postupci zasnovani na razvoju matrice sistema jednačina (ii) postupci zasnovani na analizi topologije kola. U do sada publikovanim radovima matrični metodi su se pokazali superiornim u analizi elektronskih kola veće složenosti.

Postupak simboličke analize zasnovan je na rešavanju linearnog sistema jednačina koji opisuje kolo u simboličkom obliku. Gausov metod eliminacije promenljivih koji je veoma efikasan u numeričkoj analizi nije našao širu primenu u simboličkoj analizi zbog glomaznih analitičkih izraza i velikog broja potiranja u međurezultatima. Zbog toga se za rešavanje sistema jednačina u simboličkom obliku uglavnom primenjuju Cramerova pravila pri čemu se problem svodi na

određivanje analitičkog izraza determinanata. Imenilac je determinanta admitansne matrice, dok je brojilac determinanta admitansne matrice u kojoj je kolona koja odgovara izlaznoj veličini zamenjena slobodnim vektorom.

Polazeći od osobina determinanata i doprinosa proizvoljnog elementa kola matrici sistema jednačina može se pokazati da za polinome brojioca i imenioca funkcije mreže važi sledeći izraz:

$$\det(A) = y_k \cdot \frac{1}{\infty_k} \det(A_{\infty}^k) + \det(A_0^k) \quad (1)$$

gde je: A matrica admitansi čvorova; $A_{\infty}^k = \lim_{y_k \rightarrow \infty} A$;

$A_0^k = \lim_{y_k \rightarrow 0} A$; y_k doprinos elementa kola, a ∞_k predstavlja

beskonačnu promenljivu (simbolički).

U ovom radu predloženo se metod analize kola zasnovan na uzastopnoj primeni iste operacije dekompozicije nad polinomom determinante pri čemu se ostatak prethodnog koraka, A_0^k , koristi kao početna vrednost za naredni korak. Tokom ovog postupka neophodno je izvršiti selekciju elemenata kola za koje će rekurzivna procedura biti završena bez ostatka. Zahtevani uslov ispunjava grupa elemenata za koje dopune matrice odvodnosti čvorova ispunjavaju celu vrstu matrice. Praktično svi ti elementi kola su incidentni sa čvorom koji odgovara razmatranoj vrsti matrice. Uzastopna primena rekurentnog postupka u odnosu na selektovane elemente rezultovaće sledećim izrazom:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n \frac{y_k}{\infty_k} \cdot \det(A_{\infty}^k) \quad (2)$$

Gde je $A_{\infty}^k = \lim_{y_k \rightarrow \infty} A^{k-1}$; $A_0^k = \lim_{y_k \rightarrow 0} A_0^{k-1}$ $A_0^n = 0$; $A_0^0 = 0$ za $k=1, \dots, n$

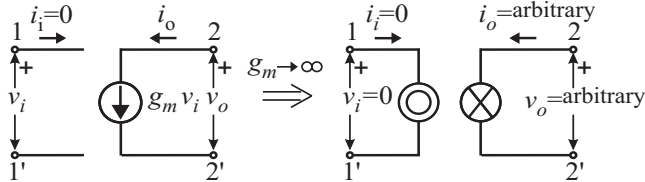
y_k doprinos elementa kola sa indeksom k ;

n broj elemenata incidentnih sa specificiranim čvorom

Relacija (2) ukazuje da determinanta originalnog kola može da se predstavi u funkciji od determinanta koje odgovaraju redukovanim kolima. Određivanje graničnih vrednosti funkcije kola kada doprinos elementa kola teži nuli odnosno beskonačnosti odgovara dvema operacijama nad topologijom kola. Obe operacije redukuju kompleksnost električne mreže. Ukoliko parametar mreže teži beskonačnosti, broj nezavisnih napona čvorova se umanjuje, dok se u slučaju kada teži nuli, umanjuje broj grana mreže.

Elementi sa jednim pristupom (R, L, C) definisani su preko odgovarajuće admitanse. Promena topologije kola koja nastaje kada admitansa teži nuli odgovara eliminaciji elementa, dok slučaj kada admitansa teži beskonačnosti odgovara zameni elementa kratkim spojem.

Ukoliko parametar kontrolisanog generatora teži beskonačnosti, on se ponaša kao *nulor*. Nulor je četvoropol sastavljen od dva singularna elementa, *noratora* i *nulatora* [3]. Šematski prikaz nulora dat je na slici 1. Nulor je rezistivni element sa jednim pristupom kroz koji ne protiče struja i na čijim je krajevima napon jedna nuli. Norator je definisan komponenta sa jednim pristupom za koji su i struja i napon proizvoljni. Nulor ima veliki značaj u analizi i sintezi analognih elektronskih kola. Osnovna karakteristika nulora je da je on univerzalan aktivni element. Ovo praktično znači da se bilo koja linearna ili nelinearna funkcija može realizovati uz pomoć pasivnih elemenata (otpornosti i kapacitivnosti) i samo jednim nulorom kao aktivnim elementom [3].



Slika 1. Predstavljanje transkonduktanskog pojačavača čiji parametar teži beskonačnosti

Redukovanje topologije kola zasnovano na uvođenju singularnih elemenata zahteva tri topološke operacije:

- (i) Kratkospajanje – zamena grane kratkim spojem.
- (ii) Eliminisanje – zamena grane otvorenom vezom.
- (iii) Nulorovanje – zamena SGKN nulorom.

Gore navedenim topološkim operacijama zamenjuju se regularni elementi kola singularnim elementima (kratak spoj, otvorena veza, norator, nulor). Dalja redukcija kompleksnosti kola može se izvesti ekvivalencijama za paralelnu i serijsku vezu elemenata. Paralelna, odnosno redna veza elemenata biće zamenjena ekvivalentnim elementom u skladu sa strujno-naponskom karakteristikom komponenta u spoju.

Kada kolo sadrži nulore, formulacija sistema jednačina se uobičajeno sprovodi modifikovanom metodom napona čvorova na isti način kao i za elemente kontrolisane strujom. Ovim postupkom se za svaku od ovih komponenta uvodi nova promenljiva, čime se povećavaju dimenzije admitansne matrice.

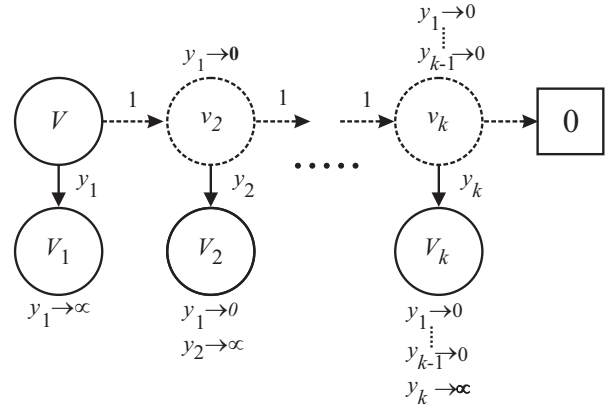
Drugačiji pristup formulaciji sistema jednačina kola sa singularnim elementima uvodi ∞ -promenljive [4, 5, 6, 7], koje se ne mogu tretirati kao numeričke vrednosti već kao simboličke promenljive. Prisustvo nulora u kolu obezbeđuje da se u generisanom sistemu jednačina ne promeni broj promenljivih. Dopuna admitansne matrice mreže usled prisustva nulora dobija se zamenom doprinosa strujnog generatora kontrolisanog naponom sa beskonačnom promenljivom na sledeći način:

$$\begin{matrix} k & m \\ i \left[\begin{matrix} g_{mi} & -g_{mi} \\ -g_{mi} & g_{mi} \end{matrix} \right] & \Rightarrow & i \left[\begin{matrix} \infty_i & -\infty_i \\ -\infty_i & \infty_i \end{matrix} \right] \\ j & j \end{matrix} \quad (3)$$

Topološki dijagram odluke (TDD) predstavlja grafičku interpretaciju analitičkog izraza imenioca ili brojioca funkcije kola. Svakom od čvorova u dijagramu pridružen je određeni opis kola. Termin čvor u dijagramu, odnosi se na čvor grafa i treba ga razlikovati od čvora u kolu. Istovremeno, svakom od ovih opisa kola odgovara analitički izraz koji je definisan samim stablom grafa. Da bi se smanjila mogućnost zamene

pojmovna, u daljem tekstu čvorove koji se odnose na graf označićemo sa ČG, dok ćemo čvorove kola označiti sa ČK.

Slika 2 ilustruje jedan korak rekurzivne procedure konstrukcije TDD u opštem slučaju. Istovremeno ovaj graf sadrži prikaz faktorizacionog postupka opisanog jednačinom (1). Faktorizacija je primenjena u skladu sa redosledom selektovane grupe admitansi. Na početku formiranja grafa funkcija kola, $P=V.expr$, koja predstavlja ČG roditelja, faktorizovana je u odnosu na doprinos prvog elementa kola, y_1 . Isprekidana linija je usmerena u pravcu privremenog ČG koji odgovara potkolu sa istim brojem ČK i koje je generisano eliminacijom admitanse ($y_1 \rightarrow 0$). Puna linija je usmerena ka izvedenom kolu koje je dobijeno ekstrakcijom doprinosa elementa ($y_1 \rightarrow \infty$).



Slika 2. Jedan korak rekurzivne procedure za konstruisanje TDD grafa

3. REDUKCIJA KOLA

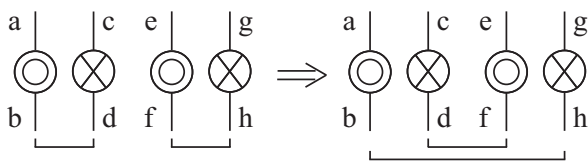
Pasivni elementi u paraleli sa noratorom ili nulatorom mogu se eliminisati iz kola, što je očigledno kada se ima u vidu doprinos nulora matrici sistema iz jednačine (3). Paralelna veza nulatora i noratora koji čine nulor ekvivalentna je kratkom spoju, dok je redna veza ova dva elementa ekvivalentna otvorenoj vezi.

Tabela I daje pregled ekvivalentnih elemenata redne odnosno paralelne veze različitih tipova elemenata.

Tabela I

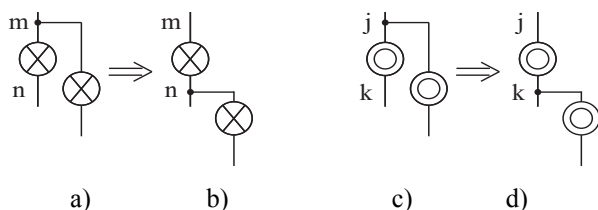
Spoj elemenata	Ekvivalentni tip elementa
Pasivni element u paraleli sa noratorom (nulatorom)	Norator (nulator)
Redna veza pasivnog elementa sa noratorom (nulatorom)	Norator (nulator)
Paralelna veza nulatora i noratora koji čine nulor	Kratak spoj
Redna veza nulatora i noratora koji čine nulor	Otvorena veza

Na osnovu transformacije rasparivanja nulora [5] sledi da gornje ekvivalencije za rednu ili paralelnu vezu noratora i nulatora važe i za proizvoljan par norator-nulor uz formiranje novog nulora. Prema ovoj transformaciji dva proizvoljna nulora mogu međusobno da zamene svoje konstitutivne elemente i da formiraju drugi par nulora, kao što je prikazano na slici 3.



Slika 3. Ilustracija transformacije rasparrivanja nulora

Uzastopna dodela nultih vrednosti parametrima elemenata kola koji su incidentni sa istim ČK, prema relaciji (2), ne rezultuje uvek kolom koje nema fizički smisao. Topologija kola za koju se ovaj postupak ne može direktno primeniti je kolo u kojem je za jedan od ČK vezano više od dva singularna elementa. U ovom slučaju neophodno je primeniti transformaciju stabla nulator-norator, koja je ilustrovana na slici 4. Prema ovoj transformaciji, potkolo koje se sastoji od para noratora sa jednim zajedničkim ČK, prikazano na slici 4.a, transformiše se u potkolo sa slike 4.b. Identična procedura primenjiva je na stablo nulatora, odnosno potkolo sa slike 4.c transformiše se u potkolo na slici 4.d.



Slika 4. Ilustracija transformacije stabla nulora za noratore (a, b) i nulatore (c, d)

4. TOPOLOŠKA INTERPRETACIJA DELOVA FUNKCIJE KOLA

Zavisno od tipa prenosne funkcije, ulazna promenljiva može biti napon ili struja, odnosno kolo se pobuđuje naponskim ili strujnim generatorom. U sistemu jednačina koji je generisan modifikovanom metodom čvorova za svaki naponski generator uvodi se struja kroz ovaj element kao dodatna promenljiva. Matrica admitansi čvorova proširuje se kolonom koja odgovara struji kroz naponski generator i vrstom koja predstavlja vezu između napona generatora i potencijala čvorova na njegovim priključcima. Da bi se uspostavile relacije između različitih tipova prenosnih funkcija istog kola, ovde će biti razmatrana redukovana forma matrice admitansi čvorova, Δ , koja isključuje dopune matrice od strane naponskih generatora.

Brojilac funkcije kola je, prema Cramerovim pravilima, jednak determinanti matrice formirane od matrice admitansi čvorova kada se kolona koja odgovara izlaznoj veličini zameni slobodnim vektorom. Analitički izraz ovog polinoma je identičan za slučaj kada se kolo pobuđuje naponom ili strujom. Ovo je jednostavno dokazati razvojem determinante po elementima određenih kolona i vrste. U slučaju strujno pobuđivanog kola, razvoj determinante se obavlja po elementima kolone koja odgovara izlaznom naponu ili izlaznoj struji, dok se u slučaju naponski pobuđivanog kola razvoj determinante obavlja duž kolone i duž vrste koje opisuju nezavisni naponski generator. Brojilac funkcije kola se može izraziti u funkciji od dva kofaktora redukovane matrice admitansi čvorova na sledeći način:

$$N = \Delta_{in1,out} + \Delta_{in2,out} \quad (4)$$

gde je:

N brojilac funkcije kola;

$in1, in2$ ČK ulaznog pristupa;

out ČK izlaznog pristupa ili indeks izlazne struje;

Δ redukovana forma matrice admitansi čvorova.

Uvodjenje strujnog izvora neće imati efekta na matrični opis imenioca funkcije kola:

$$D = \Delta \quad (5)$$

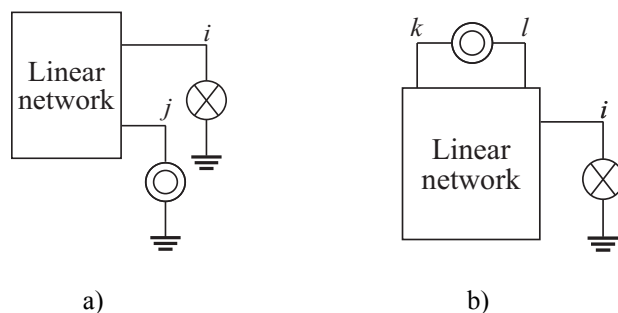
U slučaju naponske pobude, imenilac funkcije kola može se izraziti u funkciji od kofaktora redukovane forme matrice admitansi čvorova, Δ . Laplasov razvoj determinante po elementima para vrsta-kolona koji odgovara naponskom generatoru daje:

$$D = \Delta_{in1,in1} + \Delta_{in1,in2} + \Delta_{in2,in1} + \Delta_{in2,in2}, \quad (6)$$

gde je: D imenilac funkcije kola pobuđivanog naponskim generatorom; $in1, in2$ ČK ulaznog pristupa.

Polazeći od definicije singularnih elemenata, može se izvesti topološka interpretacija subdeterminanta matrice sistema jednačina koji opisuje kolo. Minor elementa y_{ij} odgovara determinanti dobijenoj nakon izostavljanja elemenata i -te vrste i j -te kolone. Praktično je naponska ili strujna veličina, koja je indeksirana sa j , izjednačena sa nulom. Pri tome je zadržana relacija koja odgovara ovoj promenljivoj. Istovremeno je i -ta jednačina eliminisana, odnosno, u slučaju naponske veličine neće važiti Kirhofov zakon za struje u ČK sa indeksom i . Ova dva dodatna uslova u opisu električne mreže znače uvođenje dva singularna elementa.

U slučaju kada se indeks kolone j i indeks vrste i odnose na naponske veličine, dodatni elementi su nulator između ČK j i referentnog ČK, kao i norator između čvora i i referentnog čvora. Sematski prikaz izmenjene topologije kola koja odgovara ovoj subdeterminanti dat je na slici 5.a. Minor dijagonalnog elementa admitansne matrice odgovara opisu električne mreže u kojem je čvor za koji je vezan taj element spojen sa referentnim čvorom.



Slika 5. Topološka interpretacija minora y_{ij} admitansne matrice a) kada se oba indeksa odnose na naponske veličine;

b) kada se indeks "i" odnosi na naponsku veličinu a indeks "j" na strujnu veličinu

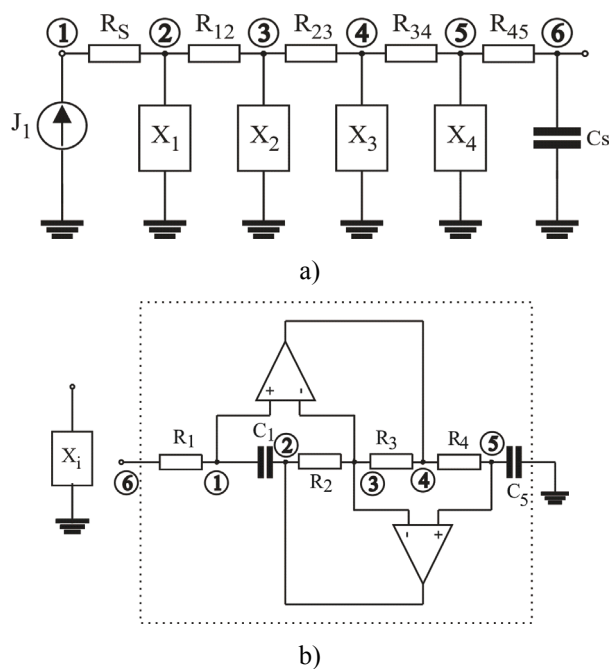
Kada se razmatra minor elementa matrice koji se nalazi u koloni koja odgovara strujnoj veličini, nakon odbacivanja kolone matrice, dobija se sistem jednačina u kojem je struja kroz odgovarajuću granu mreže jednaka nuli. Pri tome je, istovremeno, napon između krajeva te grane jednak nuli. Ovakav opis kola odgovara zameni grane nulatorom. Ukoliko se vrsta koja se odbacuje, odnosi na jednačinu koja definiše struju, tada se dobija opis kola u kojem ta strujna veličina može imati proizvoljnu vrednost. Ovakavom opisu kola

odgovara topologija u kojoj je grana mreže zamenjena noratorom. Na slici 5.b data je topološka interpretacija minora elementa y_{ij} za koji se indeks i odnosi na naponsku veličinu a indeks j na strujnu veličinu.

5. PRIMER

Opisani postupak primenjen je za analizu kola filtra propusnika niskih frekvencija prikazanog na slici 6. Filtar sadrži četiri identična potkola, koja predstavljaju frekvencijski zavisnu negativnu otpornost. Ova potkola označena su sa X_1 - X_4 na slici 6.a dok je na slici 6.b data njihova struktura. Izvršeno je poređenje predloženog postupka sa metodom koji se zasniva na dijagramu odlučivanja za određivanje determinante, *Determinant Decision Diagram* (DDD) [8]. Radi se o metodu koji je, prema saznanju autora, dao najbolje do sada publikovane rezultate u kategoriji matricnih metoda.

Primenom predloženog TDD postpuka simboličke analize dobijen je analitički izraz funkcije kola koji sadrži 54 množenja i 53 sabiranja. Ovaj algebarski izraz je kompaktniji u odnosu na simboličku funkciju kola koju generiše metod zasnovan na DDD [8] u kojim je dobijen izraz sa 62 množenja, i 62 sabiranja.



Slika 6. a) Filtar propusnik niskih frekvencija sa frekvencijski zavisnom negativnom otpornošću
b) kolo frekvencijski zavisne negativne otpornosti (FDNR)

6. ZAKLJUČAK

Rad opisuje metod za direktno generisanje simboličke funkcije kola u faktorizovanom obliku. Postupak polazi od činjenice da je funkcija kola racionalna po kompleksnoj frekvenciji i bilinearna po parametrima kola. Generisanje simboličke funkcije kola zasniva se na topološkoj inspekciji električne mreže nakon dodele graničnih vrednosti pojedinim parametrima kola. U ovom radu data je veza između matricnog postupka rešavanja simboličkog sistema linearnih jednačina i predloženog metoda. Delovima funkcije kola koji odgovaraju brojiocu i imeniocu, odnosno odgovarajućim

determinantama, pridružuju se topologije iz kojih se ovi polinomi generišu. Uvodjenjem nulora u opis kola omogućeno je da se i za subdeterminante matrice sistema jednačina formira topološka interpretacija.

Predloženi postupak simboličke analize električnih mreža u određenim slučajevima generiše kompaktnije analitičke izraze funkcije kola u odnosu na matricne metode zahvaljujući prednostima koje pruža topološki pristup.

LITERATURA

- [1] S. Đordjević, P. Petković, "Generation of Factorized Symbolic Network Function by Circuit Topology Reduction," *Proceedings of MIEL'04*, Vol. 2, Niš, 2004 (Serbia, Niš, 2004), pp. 773-776.
- [2] S. Đordjević, P. Petković, "Reordering in Topology Decision Diagram Method for Symbolic Circuit Analysis," *Proceedings of MIEL'06*, Niš, 2006 (Serbia, Niš, 2006), pp. 416 – 419.
- [3] H. J. Carlin, "Singular network elements", *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-11, pp. 67-72, 1965.
- [4] D. G. Haigh, "Analytic approach to nullor transformation for FET circuit synthesis: Part I-Nullator-norator tree transformations," in *Proc. 2006 IEEE Int. Symp. Circuits Syst.*, May 2006, pp. 5231-5234.
- [5] D. G. Haigh, "Analytic approach to nullor transformation for FET circuit synthesis: Part II-Nullator-norator repairing and cloning," in *Proc. 2006 IEEE Int. Symp. Circuits Syst.*, May 2006, pp. 5235-5238.
- [6] D. G. Haigh, T. J. W. Clarke, and P. M. Radmore, "A mathematical framework for active circuits based on port equivalence using limit variables.," in *Proc. 2006 IEEE Int. Symp. Circuits Syst.*, May 2006, pp. 2949-2952.
- [7] D. G. Haigh, T. J. W. Clarke, and P. M. Radmore, "Symbolic framework for linear active circuits based on port equivalence using limit variables," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 53, pp. 2011-2024, Sept. 2006.
- [8] X.-D. Tan and C.-J. Shi, "Hierarchical symbolic analysis of analog integrated circuits via determinant decision diagrams," *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, vol. 19, pp. 401-412, Apr. 2000.

Abstract – This paper describes a symbolic analysis method for network function generation in nested form. The procedure consists of setting circuit admittance to limit values that result in replacement of a regular element by singular. For the determinants of the network function numerator, denominator and their subdeterminants it is used topological interpretation in the form of a circuit description. The aim of the procedure is to generate circuit function in a compact form with as small as possible number of arithmetic operations.

SYMBOLIC ANALYSIS OF ELECTRONIC CIRCUITS BY USING EXTREME VALUES OF CIRCUIT PARAMETERS

Srđan Đorđević